AP-03 – Corrigés

Corrigé AP03-01

a. f est dérivable sur $D=\mathbb{R}_*$ et pour tout réel x de D :

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+2x.$$

b. f est dérivable sur $D=]0;+\infty[$ et pour tout réel x de D :

$$f'(x)=5x^4-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

c. f est dérivable sur $D=\mathbb{R}^*$. De plus, $f=-\frac{3}{2}\times\frac{1}{x}$. Donc pour tout réel x de D :

$$f'(x)=-\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{3}{2x^2}.$$

d. f est dérivable sur $D=\mathbb{R}^*$ et pour tout réel $x\in D$:

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{x}=\frac{2x^2}{x}+\frac{1}{x}=2x+\frac{1}{x}.$$

Donc

$$f'(x)=2-\frac{1}{x^2}.$$

e. f est dérivable sur $D=]0;+\infty[$ et pour tout $x\in D$:

$$f'(x)=1\cdot\sqrt{x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}\cdot2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{x}{2\sqrt{x}}=\frac{2x+x}{2\sqrt{x}}=\frac{3x}{2\sqrt{x}}.$$

f. f est dérivable sur $D=\mathbb{R}^*$ et pour tout $x\in D$:

$$f'(x)=\frac{-4x^{-5}}{8}=-\frac{x^{-5}}{2}.$$

g. f est dérivable sur $D=\mathbb{R}$ et pour tout $x\in D$:

$$f'(x)=-1.$$

h. Le quotient x^2+2 n'est jamais nul, donc f est dérivable sur $D=\mathbb{R}$. Pour tout $x\in D$:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+2)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+2)^2}=\frac{2x^3+4x-2x^3+2x}{(x^2+2)^2}=\frac{6x}{(x^2+2)^2}.$$

i. Le dénominateur $2x^2-x-1$ admet pour racine évidente $x_1=1$. Son autre racine x_2 vérifie donc

$$x_1x_2=\frac{c}{a}\implies x_2=-\frac{1}{2}.$$

La fonction f est donc dérivable sur

$$D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};1\right\}=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2};1\right[\cup]1;+\infty[.$$

Pour tout $x\in D$:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(10x-3)(2x^2-x-1)-(5x^2-3x+2)(4x-1)}{(2x^2-x-1)^2}\\&=\frac{(20x^3-6x^2-10x^2+3x-10x+3)-(20x^3-5x^2-12x^2+3x+8x-2)}{(2x^2-x-1)^2}\\&=\frac{20x^3-16x^2-7x+3-20x^3+17x^2-11x+2}{(2x^2-x-1)^2}\\&=\frac{x^2-18x+5}{(2x^2-x-1)^2}.\end{aligned}$$

Corrigé AP03-02

a. $f'(x)=2x-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

b. $f'(x)=\dfrac{3(2x+3)-2(3x-1)}{(2x+3)^2}=\dfrac{11}{(2x+3)^2}$.

c. $f'(x)=\dfrac{3x^2(1+x)-(1+x^3)\times 1}{(1+x)^2}=\dfrac{3x^2+3x^3-1-x^3}{(1+x)^2}=\dfrac{2x^3+3x^2-1}{(1+x)^2}$;

d. $f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

e. $f'(x)=\sqrt{4-x}+x\times\dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}}=\dfrac{8-2x-x}{2\sqrt{4-x}}=\dfrac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}$;

f. $f'(x)=4(2x-2)(x^2-2x)^3=8x^3(x-1)(x-2)^3$;

g. On peut écrire que $f(x)=(1-2x)^{-3}$, donc :

$f'(x)=-3(-2)(1-2x)^{-4}=\dfrac{6}{(1-2x)^4}$;

h. $f'(x) = -4\sin(4x-1)$.

Corrigé AP03-03

- $f_1'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = e^x + xe^x$.
- $f_2'(x) = \dfrac{3(x^2+1)-(3x+5)\times(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{3x^2+3-6x^2-10x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-3x^2-10x+3}{(x^2+1)^2}$.
- $f_3'(x) = (2x+1)e^{x^2+x+1}$.
- $f_4'(x) = 5 \times 4 \times (4x-3)^4 = 20(4x-3)^4$.

Corrigé AP03-04

$f_1'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (2x+x^2)e^x$;

$f_2'(x) = \dfrac{1\times(x^2+1)-(x-3)\times(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2+6x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2+6x+1}{(x^2+1)^2}$;

$f_3'(x) = (2\times 2x+5)e^{2x^2+5x} = (4x+5)e^{2x^2+5x}$;

$f_4'(x) = 6 \times 2(2x-11)^5 = 12(2x-11)^5$.

Corrigé AP03-05

1. Pour tout réel x :

$$\varphi'(x) = 1 \cdot e^x + xe^x - e^x = xe^x.$$

Puisque l'exponentielle est strictement positive, $\varphi'(x)$ est du signe de x. Donc :

- Sur $]-\infty;0]$, φ' est négative et donc φ est décroissante.
- Sur $[0;+\infty[$, φ' est positive et donc φ est croissante.

φ admet donc un minimum sur $\mathbb{R}$ en 0, minimum égal à :

$$\varphi(0) = 0e^0 - e^0 + 1 = 0 - 1 + 1 = 0.$$

2. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - (e^x-1)\cdot 1}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

b. On remarque que pour tout réel x non nul :

$$f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}.$$

Or φ admet 0 pour minimum, donc $\varphi(x)$ est positif, et il en va de même pour x^2. Pour tout réel x *non nul*, $f'(x)$ est positive.
La fonction f est donc croissante sur $]-\infty;0[$ ainsi que sur $]0;+\infty[$.

Corrigé AP03-06

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Le polynôme $3x^2-3$ a pour racines évidentes 1 et -1, son coefficient principal est 3, donc positif, ce qui signifie que le polynôme est positif à l'extérieur de ses racines.
Donc :

- Sur $]-\infty;-1]$, f' est positive et donc f est croissante.
- Sur $[-1;1]$, f' est négative et donc f est décroissante.
- Sur $[1;+\infty[$, f' est positive et donc f est croissante.

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (1+x)\mathrm{e}^x.$$

Puisque $\mathrm{e}^x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $1+x$.
La fonction $x \mapsto 1+x$ s'annule en $x=-1$, elle a un coefficient directeur positif (1), donc elle est croissante, ce qui implique qu'elle est négative à gauche de -1 et positive à droite de 1.
Donc :

- Sur $]-\infty;-1]$, g' est négative et donc g est décroissante.
- Sur $[-1;+\infty[$, g' est positive et donc g est croissante.

Corrigé

a. Pour tout réel x, e^x est strictement positif; sachant que x est supérieur à -1, $x+1$ est lui aussi strictement positif.
Le produit de ces deux facteurs est donc strictement positif.

x	-1 $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$+$

b. $f = \frac{u}{v}$ où u et v sont définies sur $]-1;+\infty[$ par

$$u(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad v(x) = x+1.$$

u est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et v est dérivable et non nulle sur $]-1;+\infty[$. Donc f est aussi dérivable sur $]-1;+\infty[$ avec

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Sachant que

$$u'(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad v'(x) = 1,$$

pour tout réel $x \geqslant -1$:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \cdot (x+1) - \mathrm{e}^x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{(x+1)^2} = \frac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}.$$

Les facteurs e^x et $(x+1)^2$ étant strictement positifs, $f'(x)$ est du même signe que x. D'où le tableau de variation suivant (les éléments en rouge ne sont exigibles qu'en terminale).

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Avec :

$$f(0) = \frac{\mathrm{e}^0}{0+1} = \frac{1}{1} = 1.$$

(Terminale seulement.)

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x \geqslant -1}} x+1 = 0^+$$

et

$$\lim_{x \to -1} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathrm{e}^{-1} > 0.$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x \geqslant -1}} \frac{\mathrm{e}^x}{x-1} = +\infty.$$

D'autre part, pour $x \neq 0$:

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x+1} = \frac{x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}{1+\frac{1}{x}}.$$

Nous savons (cours sur les croissances comparées) que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$$

et que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \implies \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1.$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}{1+\frac{1}{x}} = +\infty.$$