Term. spé. maths

AP-02 – suites numériques, études de fonctions

➡ Suites : Raisonnement par récurrence

AP02-01

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_n + 3$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 5.$$

Corrigé

1. *Initialisation.* Si $n = 0$:

$$3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^0 + 5 = 3 \times 1 + 5 = 8 = u_0.$$

2. *Hérédité.* Supposons que, pour un rang n donné, on ait bien

$$u_n = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 5.$$

Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 &= \frac{2}{5} \times \left(3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 5\right) + 3 \\ &= 3 \times \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{2}{5} \times 5 + 3 = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} + 2 + 3 = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} + 5. \end{aligned}$$

3. Donc, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien

$$u_n = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 5.$$

AP02-02

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3.$$

1. Calculer u_1.
2. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} \leqslant u_n.$$

   On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.
3. Que peut-on en déduire quant à la monotonie de la suite (u_n) ?

Corrigé

1. $u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 3 = \frac{1}{4} \times 8 + 3 = 5.$
2. Notons $\mathscr{A}(n)$ l'assertion « $u_{n+1} \leqslant u_n$ ».
   (Initialisation). Puisque $u_0 = 8$ et $u_1 = 5$, on a bien $u_1 \leqslant u_0$. Donc $\mathscr{A}(0)$ est vraie.
   (Hérédité). Si, pour un entier n quelconque, $\mathscr{A}(n)$ est vraie, alors

$$\begin{aligned}
& u_{n+1} \leqslant u_n \\
\implies & \frac{1}{4}u_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}u_n \\
\implies & \frac{1}{4}u_{n+1} + 2 \leqslant \frac{1}{4}u_n + 2 \\
\implies & u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \\
\implies & u_{n+2} \leqslant u_{n+1}.
\end{aligned}$$

   Donc, pour n'importe quel entier n, $\mathscr{A}(n) \implies \mathscr{A}(n+1)$.
   Par récurrence, $\mathscr{A}(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n.
3. Nous avons démontré dans la question précédente que chaque terme de la suite est inférieur au terme précédent. La suite (u_n) est donc une suite décroissante.

➡ Suites : limites de suites

AP02-03

Déterminer, en justifiant la réponse, la limite de la suite (u_n) lorsque :

a. $u_n = 3^n$; **b.** $u_n = \frac{1}{2}n - 3$; **c.** $u_n = n^2 + 3n$;

d. $u_n = n - n^2$; **e.** $u_n = \dfrac{5n-8}{2n+3}$; **f.** $u_n = \dfrac{n^3+5n^2-2n}{n^2+3}$.

Corrigé

a. Puisque $3 > 1$, 3^n tend vers $+\infty$.

b. Puisque $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}n = +\infty$ et donc que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}n - 3 = +\infty$.

c. Puisque $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} 3n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} n^2 + 3n = +\infty$.

d. Puisqu'il y a F.I., procédons à une factorisation. Pour $n \neq 0$:

$$n - n^2 = n^2\left(\frac{1}{n} - 1\right).$$

Or : $\frac{1}{n}$ tend vers 0, donc le facteur $\frac{1}{n} - 1$ tend vers -1.
L'autre facteur, n^2, tend vers $+\infty$, donc la suite tend vers $-\infty$.

e. Puisqu'il y a une F.I., procédons à une factorisation. Pour $n \neq 0$:

$$\frac{5n-8}{2n+3} = \frac{n\left(5-\frac{8}{n}\right)}{n\left(2+\frac{3}{n}\right)} = \frac{5-\frac{8}{n}}{2+\frac{3}{n}}.$$

Puisque $\frac{8}{n}$ tend vers 0, le numérateur tend vers 5. Puisque $\frac{3}{n}$ tend vers 0, le dénominateur tend vers 2.
La suite tend donc vers $\frac{5}{2}$.

f. Puisqu'il y a F.I., on réalise une factorisation.

$$\frac{n^3+5n^2-2n}{n^2+3} = \frac{n^3\left(1+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)} = n \times \frac{1+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}.$$

Puisque $\frac{5}{n}$ et $\frac{2}{n^2}$ tendent vers 0, le numérateur tend vers 1.
Puisque $\frac{3}{n^2}$ tend vers 0, le dénominateur tend aussi vers 1.
Le quotient tend donc vers 1, et il est multiplié par n qui tend vers $+\infty$. La suite a donc pour limite $+\infty$.

AP02-04

Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) si :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n^2 + 4n$;

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{3}{n^2+n+1}$;

3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4n^3 - 3n + 1$;

4. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{4n^3-3n+1}{n^2+3n-2}$.

Corrigé

1. Les termes $4n$ et n^2 tendent tous deux vers $+\infty$, donc leur somme aussi :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 + 4n = +\infty.$$

2. Les termes n^2 et $n+1$ tendent tous deux vers $+\infty$, donc leur somme n^2+n+1 aussi. Par conséquent, 3 divisé par cette somme tend vers 0.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2+n+1} = 0.$$

3. Puisqu'il s'agit d'une forme indéterminée, on procède à une factorisation « forcée ». Pour $n \neq 0$:

$$u_n = 4n^3 - 3n + 1 = n^3\left(4 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right).$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \implies \lim_{n\to+\infty} 4 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} = 4.$$

et d'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$.

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

4. Ici aussi, on lève l'indéterminée à l'aide de factorisations « forcées ». Pour $n \neq 0$:

$$u_n = \frac{4n^3-3n+1}{n^2+3n-2} = \frac{n^3\left(4-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)} = n \times \frac{4-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}$$

Puisque les quotients $\frac{3}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$, $\frac{3}{n}$ et $-\frac{2}{n^2}$ tendent vers 0, le quotient tend vers 4. Il est multiplié par n qui tend vers $+\infty$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

AP02-05

Déterminer la limite en $+\infty$ des suites de terme général :

$$\text{a) } 3\left(\frac{2}{5}\right)^n; \quad \text{b) } n+2^n; \quad \text{c) } 1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n; \quad \text{d) } \frac{3^n+1}{2^n-5}.$$

Corrigé

1. Puisque $-1<\frac{2}{5}<1$, la suite de terme général $\left(\frac{2}{5}\right)^n$ tend vers 0. Il en va de même de la suite de terme général $3\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

2. Puisque $2>1$, la suite de terme général 2^n tend vers $+\infty$. C'est aussi le cas de la suite de terme général n, donc la suite de terme général $n+2^n$ tend vers $+\infty$.

3. On sait que :

$$1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right].$$

Or puisque $-1<\frac{1}{3}<1$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=0\\
\Longrightarrow\ &\lim_{n\to+\infty}1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=1\\
\Longrightarrow\ &\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2}\left[1-\left[\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]=\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

➡ fonctions : études de fonctions

AP02-06

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x.$$

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f.

2. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

1. Pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{3}{2} \times 2x - 6 = 3x^2 + 3x - 6.$$

2.

$$f'(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 3(x^2 + x - 2).$$

Donc $f'(x)$ est du même signe que le polynôme de degré 2 $x^2 + x - 2$.
Ce polynôme admet pour racines évidentes 1 et -2.
Son coefficient de degré deux est 1, il est donc strictement positif; on en déduit que le polynôme est positif à l'extérieur de ses racines.
Donc :

- Sur $]-\infty; -2]$ f' est positive donc f est croissante.
- Sur $[-2; 1]$ f' est négative donc f est décroissante.
- Sur $[1; +\infty[$, f' est positive donc f est croissante.

AP02-07

1. On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0$ où f est définie sur $[-6; 4]$ par

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 10.$$

   a. Étudier les variations de la fonction f.
   b. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$, puis une valeur arrondie de chacune de ces solutions à 0,01 près.

2. Mêmes questions si l'on cherche à résoudre l'équation $f(x) = 2\,000$ où f est définie sur $[10; 50]$ par

$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 302x + 200.$$

Corrigé

1. **a.** $f'(x) = 2 \times 3x^2 + 3 \times 2x - 36 = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + 2x - 6)$. Donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 + 2x - 6$ qui est un polynôme de degré 2. Son discriminant est :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25.$$

Ce discriminant est positif, donc le polynôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{-1-5}{2} = -3; \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{-1+5}{2} = 2.$$

Le coefficient de degré 2 est 1, positif, donc $f'(x)$ est positive à l'extérieur des racines.
On peut donc établir le tableau de variations suivant.

x	-6		-3		2		4
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-98	↗ 0 ↗	91	↘ 0 ↘	-34	↗ 0 ↗	42

b. D'après le tableau de variation, l'équation $f(x) = 0$ admet donc 3 solutions.

c. À l'aide de la calculatrice, on détermine que ces solutions ont pour valeurs approchées $-5{,}17$, $0{,}29$ et $3{,}38$.

2. La fonction f est dérivable sur $[10;50]$ et pour tout x de cet intervalle :

$$f'(x) = 3x^2 - 60x + 302.$$

Le discriminant de ce polynôme de degré 2 est :

$$\Delta = (-60)^2 - 4\times 3\times 302 = -24.$$

Ce discriminant étant négatif, il n'y a pas de racine et le polynôme est toujours du signe de son coefficient de degré 2, donc strictement positif.
La fonction f est donc continue et strictement croissante sur $[10;50]$. De plus $f(10) = 1220$ donc $f(10) < 2000$ tandis que $f(50) = 65300$ donc $f(50) > 2000$.
L'équation $f(x) = 2000$ admet donc une unique solution dans $[0;50]$. Une recherche à la calculatrice permet de préciser que cette solution est voisine de 19,13.