Term. spé. maths

AP-02 – suites numériques, études de fonctions

➡ Suites : Raisonnement par récurrence

AP02-01

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 5.$$

AP02-02

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3.$$

1. Calculer u_1.
2. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} \leqslant u_n.$$

   On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.
3. Que peut-on en déduire quant à la monotonie de la suite (u_n) ?

➡ Suites : limites de suites

AP02-03

Déterminer, en justifiant la réponse, la limite de la suite (u_n) lorsque :

a. $u_n = 3^n$; **b.** $u_n = \frac{1}{2}n - 3$; **c.** $u_n = n^2 + 3n$;

d. $u_n = n - n^2$; **e.** $u_n = \dfrac{5n-8}{2n+3}$; **f.** $u_n = \dfrac{n^3 + 5n^2 - 2n}{n^2+3}$.

AP02-04

Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) si :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n^2 + 4n$;

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{3}{n^2+n+1}$;

3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4n^3 - 3n + 1$;

4. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{4n^3-3n+1}{n^2+3n-2}$.

AP02-05

Déterminer la limite en $+\infty$ des suites de terme général :

$$\text{a) } 3\left(\frac{2}{5}\right)^n ; \quad \text{b) } n+2^n ; \quad \text{c) } 1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n ; \quad \text{d) } \frac{3^n+1}{2^n-5}.$$

➡ fonctions : études de fonctions

AP02-06

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x.$$

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f.

2. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

AP02-07

1. On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0$ où f est définie sur $[-6;4]$ par

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 10.$$

a. Étudier les variations de la fonction f.

b. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$, puis une valeur arrondie de chacune de ces solutions à 0,01 près.

2. Mêmes questions si l'on cherche à résoudre l'équation $f(x) = 2\,000$ où f est définie sur $[10;50]$ par

$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 302x + 200.$$