AP-01 – suites numériques

➡ Étudier la monotonie d'une suite

AP-01/01

Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

1. u est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5n^2 - n + 2$;
2. v est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n^3 + 7n + 3$;
3. w est définie sur $\mathbb{N}$ par $w_0 = 2$ et pour tout entier naturel n :
   $w_{n+1} = w_n - (n+3)^2$.

AP-01/02

Étudier la monotonie des suites proposées ci-après :

1. La suite (u_n) telle que $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n :
   $u_{n+1} = u_n + 4n + 5$.
2. La suite (v_n) telle que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$: $u_n = n^2 - 5n$.
3. La suite (w_n) telle que pour tout entier naturel n : $w_n = (n+1) \times 3^n$.

AP-01/03

Étudier les variations des suites (u_n), (v_n), (w_n) et (z_n) définies par :

a. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n^2 + 3n + 2.$

b. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{3n-1}{2n+1}.$

c. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sqrt{n}.$

d. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$

➡ Suites arithmétiques et géométriques

AP-01/04

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = nu_n$.
La suite (u_n) est-elle géométrique ?

AP-01/05

Pour chacune des suites ci-dessous indiquer en justifiant si elle est arithmétique et, dans l'affirmative, préciser sa raison et son premier terme.

a. $u_n = (3n+1)^2$ avec $n \in \mathbb{N}$.

b. $v_n = 22n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

c. $w_n = n+1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

d. $x_n = 4{,}8(-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

AP-01/06

Pour chacune des suites ci-dessous, indiquer en justifiant si elle est géométrique et, dans l'affirmative, préciser sa raison.

a. $u_0 = -8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -3u_n + 2$.

b. $v_0 = -2{,}4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{2}{7}v_n$.

c. $w_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} = \dfrac{1}{n}w_n$.

AP-01/07

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2n}u_n.$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{n}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

➡ Raisonnement par récurrence

AP-01/08

Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = -1$ et pour tout entier naturel non nul n :

$$v_{n+1} = -3v_n + 8.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $v_n = (-3)^n + 2$.

AP-01/09

Démontrer les relations suivantes :

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2;$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)^2}{2}\right)^2 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$