AP-01 – suites numériques – corrigés

Corrigé AP

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 5(n+1)^2 - (n+1) + 2 - 5n^2 + n - 2 \\ &= 5n^2 + 10n + 5 - n - 1 + 2 - 5n^2 + n - 2 = 10n + 4. \end{aligned}$$

Or

$$n \geqslant 0 \implies 10n + 4 \geqslant 4 \implies 10n + 4 > 0,$$

donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. On a $v_n = f(n)$, alors f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^3 + 7x + 3$. Cette fonction est dérivable sur cet intervalle et

$$f'(x) = 3x^2 + 7.$$

Il est clair que pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f'(x)$ est strictement positive, donc la fonction f est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Par conséquent la suite (v_n) est elle-même strictement croissante.

3. Remarquons que pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} & w_{n+1} - w_n = -(n+3)^2 \\ \implies & w_{n+1} - w_n < 0. \end{aligned}$$

La suite (w_n) est donc strictement décroissante.

Corrigé AP-01/02

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & u_{n+1} - u_n = 4n + 5 \\ \implies & u_{n+1} - u_n \geqslant 5 \\ \implies & u_{n+1} - u_n > 0. \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. *Variante 1.*La fonction polynôme de degré 2 $x \mapsto x^2 - 5x$ admet un coefficient principal positif, elle est donc croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{b}{2a};+\infty\right[= \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$. La suite (v_n) est donc bien croissante pour $n \geqslant 2$.

Variante 2. Pour tout $n \geqslant 2$,

$$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 - 5(n+1) - n^2 + 5n = 2n - 4.$$

Or

$$\begin{aligned} n &\geqslant 2 \\ \Longrightarrow 2n &\geqslant 4 \\ \Longrightarrow 2n-4 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est bien croissante pour $n \geqslant 2$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= (n+2) \times 3^{n+1} - (n+1) \times 3^n \\ &= 3^{n+1} n + 2 \times 3^{n+1} - 3^n n - 3^n \\ &= 3^n (3n + 2 \times 3 - n - 1) \\ &= 3^n (2n+5). \end{aligned}$$

Or 3^n est strictement positif et puisque n est positif ou nul,

$$2n+5 > 5 \Longrightarrow 2n+5 > 0.$$

Le produit $3^n(2n+5)$ est donc strictement positif, donc la suite (w_n) est (strictement) croissante.

Corrigé AP-01/03

1. *Corrigé 1.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left[(n+1)^2 + 3(n+1) + 2\right] - \left[n^2 + 3n + 2\right] \\ &= n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 + 2 - n^2 - 3n - 2 \\ &= 2n + 4. \end{aligned}$$

Or

$$n \geqslant 0 \Longrightarrow 2n \geqslant 0 \Longrightarrow 2n+4 \geqslant 4 \Longrightarrow 2n+4 > 0.$$

Donc la suite (u_n) est (strictement) croissante.

Corrigé 2. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 3x + 2.$$

Pour tout entier naturel n, on a $u_n = f(n)$.

La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$f'(x) = 2x + 3.$$

Or

$$x \geqslant 0 \Longrightarrow 2x+3 \geqslant 3 \Longrightarrow 2x+3 > 0.$$

La fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, donc la suite (u_n) est, elle aussi, strictement croissante.

2. *Corrigé 1.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{3(n+1)-1}{2(n+1)+1} - \frac{3n-1}{2n+1} \\
&= \frac{3n+3-1}{2n+2+1} - \frac{3n-1}{2n+1} \\
&= \frac{3n+2}{2n+3} - \frac{3n-1}{2n+1} \\
&= \frac{(3n+2)(2n+1)}{(2n+3)(2n+1)} - \frac{(3n-1)(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{6n^2+3n+4n+2}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{6n^2+9n-2n-3}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{6n^2+7n+2-(6n^2+7n-3)}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{6n^2+7n+2-6n^2-7n+3}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{5}{(2n+1)(2n+3)}.
\end{aligned}$$

Or, n étant positif, les facteurs $(2n+1)$ et $(2n+3)$ sont strictement positifs et donc

$$\frac{5}{(2n+1)(2n+3)} > 0 \implies v_{n+1} - v_n > 0.$$

La suite (v_n) est donc strictement croissante. *Corrigé 2.* Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{3x+1}{2x+1}.$$

Pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.
La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3(2x+1)-(3x+1)\times 2}{(2x+1)^2} \\
&= \frac{6x+3-6x-2}{(2x+1)^2} \\
&= \frac{1}{(2x+1)^2}.
\end{aligned}$$

Il est clair que f' est strictement positive sur $[0;+\infty[$, donc f est strictement croissante et donc (u_n) aussi.

3. Soit f la fonction définie par $x \mapsto \sqrt{x}$. Pour tout entier naturel n, on a $f(n) = w_n$.
Or on sait que la fonction f est strictement croissante, donc la suite (w_n) l'est aussi.

4. Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} z_{n+1} - z_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1} - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}} - \cdots - \cancel{\frac{1}{n}} \\ &\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Puisque n est positif, $\dfrac{1}{n+1}$ est strictement positif, donc la suite (z_n) est strictement croissante.

Corrigé AP-01/04

Calculons les premiers termes :

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \times u_0 = 0\,; \\ u_2 &= 1 \times u_1 = 1 \times 0 = 0\,; \\ u_3 &= 2 \times u_2 = 2 \times 0 = 0. \end{aligned}$$

On voit que, à l'exception de u_0, les termes de la suite (u_n) sont nuls. La suite (u_n) est donc géométrique de raison 0.
Montrons ce résultat par récurrence. Soit $\mathscr{A}(n)$ l'assertion « $u_n = 0$ ».
$\mathscr{A}(1)$ est vraie. Si $\mathscr{A}(n)$ est vraie (pour n entier naturel non nul quelconque), alors

$$u_n = 0 \implies u_{n+1} = n u_n = n \times 0 = 0.$$

Donc $\mathscr{A}(n+1)$ sera aussi vraie.
L'assertion $\mathscr{A}(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel non nul.

Corrigé AP-01/05

a. On a :

$$\begin{aligned} u_0 &= (3 \times 0 + 1)^2 = 1^2 = 1\,; \\ u_1 &= (3 \times 1 + 1)^2 = 4^2 = 16\,; \\ u_2 &= (3 \times 2 + 1)^2 = 7^2 = 49. \end{aligned}$$

Donc :

$$u_1 - u_0 = 16 - 1 = 15\,; \quad u_2 - u_1 = 49 - 16 = 33.$$

Puisque $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$, cette suite ne peut pas être arithmétique.

b. *Corrigé 1.* Pour tout entier naturel n

$$v_{n+1} - v_n = 22(n+1) - 22n = 22n + 22 - 22n = 22.$$

La suite (v_n) est donc arithmétique de raison 22.
Corrigé 2. En posant $v_0 = 0$ et $r = 22$, on peut écrire que pour tout entier naturel n

$$v_n = 0 + n \times 22 = v_0 + 22r.$$

On reconnaît bien là le terme général d'une suite arithmétique de raison $r = 22$.

c. Pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1} - w_n = [(n+1)+1] - [n+1] = n+1+1-n-1 = 1.$$

La suite (w_n) est donc arithmétique de raison 1.
(On pouvait aussi procéder comme dans le corrigé 2 précédent.)

d. On a :

$$x_0 = 4{,}8(-1)^0 = 4{,}8 \times 1 = 4{,}8\,;$$
$$x_1 = 4{,}8(-1)^1 = 4{,}8 \times (-1) = -4{,}8.$$
$$x_2 = 4{,}8(-1)^2 = 4{,}8 \times 1 = 4{,}8.$$

$x_1 - x_0 = -9{,}6$ et $x_2 - x_1 = 9{,}6$ ne sont pas égaux, donc la suite (x_n) ne saurait être arithmétique.

Corrigé AP-01/06

1. On a :

$$u_0 = -8\,;$$
$$u_1 = -3 \times (-8) + 2 = 26\,;$$
$$u_2 = -3 \times 26 + 2 = -76.$$

Donc

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{26}{-8} = -\frac{13}{4} \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{-76}{26} = -\frac{38}{13}.$$

Puisque $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ cette suite ne peut pas être géométrique.

2. Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = q v_n$$

avec $q = \frac{2}{7}$. Donc cette suite est géométrique de raison $\frac{2}{7}$.

3. On a :

$$w_1 = 1\,;$$
$$w_2 = \frac{1}{1} w_1 = 1 \times 1 = 1\,;$$
$$w_3 = \frac{1}{2} w_2 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

Donc $\dfrac{w_2}{w_1} = 1$ et $\dfrac{w_3}{w_2} = \dfrac{1}{2}$ ne sont pas égaux et la suite (w_n) ne peut donc pas être géométrique.

Corrigé AP-01/07

1. On a :

$$u_2 = \frac{1+1}{2\times 1} u_1 = \frac{2}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$
$$u_3 = \frac{2+1}{2\times 2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8};$$
$$u_4 = \frac{3+1}{2\times 3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4}.$$

2. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{n} u_n}{n+1} = \frac{u_n}{2n} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n}{n} = \frac{1}{2} v_n.$$

Cette relation montre que (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = \dfrac{u_1}{1} = \dfrac{1}{2}$.

b. On en déduit que

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} v_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1}{2^n}.$$

Or

$$v_n = \frac{u_n}{n} \iff u_n = n v_n = \frac{n}{2^n}.$$

On peut vérifier qu'on retrouve bien avec cette formule les premiers termes de la suite (u_n).

Corrigé AP-01/08

Soit $\mathscr{A}(n)$ l'assertion « $v_n = (-3)^n + 2$ ».
Si $n = 1$, $(-3)^1 + 2 = -3 + 2 = -1$ et $v_1 = -1$. Donc $\mathscr{A}(0)$ est vraie (initialisation).
Supposons que pour un entier naturel n quelconque, $\mathscr{A}(n)$ soit vérifiée. Alors

$$v_n = (-3)^n + 2.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= -3v_n + 8 \\
&= -3\left((-3)^n + 2\right) + 8 \\
&= -3 \times (-3)^n - 3 \times 2 + 8 \\
&= (-3)^{n+1} - 6 + 8 \\
&= (-3)^{n+1} + 2.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{A}(n+1)$ est aussi vérifiée (hérédité).
Par récurrence, l'assertion $\mathscr{A}(n)$ est donc vérifiée pour tout entier naturel non nul n.

Corrigé AP-01/09

1. *Démonstration par récurrence de la première égalité.* Notons $\mathscr{P}(n)$ l'assertion

$$\text{« } 1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2. \text{ »}$$

(I) Si $n = 1$, on a bien $1 = 1^2$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

(H) Supposons, pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors :

$$\underbrace{1 + 3 + \cdots + (2n-1)}_{n^2} + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Donc $\mathscr{P}(n)$ vraie entraîne $\mathscr{P}(n+1)$ vraie aussi.

(C) Donc, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

2. Démonstration par récurrence de la deuxième égalité. Notons $\mathscr{Q}(n)$ l'assertion

$$\text{« } 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \text{ »}$$

(I) Si $n = 1$, $1^3 = 1$ et $\left(\frac{1 \times (1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$. Donc $\mathscr{Q}(1)$ est vraie.

(H) . Supposons $\mathscr{Q}(n)$ vraie. Alors :

$$\underbrace{1^3 + \cdots + n^3}_{\text{H.R.}} + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 =$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) =$$

$$(n+1)^2 \times \frac{n^2 + 4n + 4}{4} =$$

$$(n+1)^2 \times \frac{(n+2)^2}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{2^2} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

On a donc bien $\mathscr{Q}(n) \implies \mathscr{Q}(n+1)$.

(C) Donc, par récurrence, $\mathscr{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Démonstration de :

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (1+\cdots+n)^2.$$

Puisque, selon le cours $\dfrac{n(n+1)}{2} = 1+2+\cdots+n$, on a bien

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (1+\cdots+n)^2.$$